

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:

Klausur-ID:

--

Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Jörn Müller-Quade

4. September 2017

Klausur Algorithmen I

Aufgabe 1.	Kleinaufgaben	15 Punkte
Aufgabe 2.	Maximales Produkt	8 Punkte
Aufgabe 3.	Kürzeste Wege	12 Punkte
Aufgabe 4.	(a,b)-Bäume	6 Punkte
Aufgabe 5.	Bipartite Graphen	9 Punkte
Aufgabe 6.	Dynamische Programmierung	10 Punkte

Bitte beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und Ihrer Klausur-ID oben links auf dem Deckblatt an.
- Merken Sie sich Ihre Klausur-ID und schreiben Sie auf **alle Blätter** der Klausur und Zusatzblätter Ihre Klausur-ID und Ihren Namen.
- Die Klausur enthält 23 Blätter. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die durch Übungsblätter gewonnenen Bonuspunkte werden erst nach Erreichen der Bestehensgrenze hinzugezählt. Die Anzahl der Bonuspunkte entscheidet nicht über das Bestehen der Klausur.
- Als Hilfsmittel ist ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4 Blatt zugelassen.
- Bitte kennzeichnen Sie deutlich, welche Aufgabe gewertet werden soll. Bei mehreren angegebenen Möglichkeiten wird jeweils die schlechteste Alternative gewertet.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
max. Punkte	15	8	12	6	9	10	60
Punkte							
Bonuspunkte:	Summe:					Note:	

Name:

Klausur-ID:

Klausur Algorithmen I, 4. September 2017

Blatt 2 von 23

Aufgabe 1. Kleinaufgaben

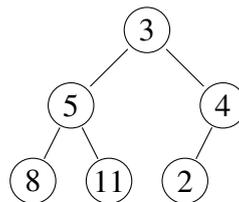
[15 Punkte]

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben. Begründen Sie Ihre Antworten jeweils kurz. *Reine Ja/Nein-Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.*

a. Gilt $2^{2^n} \in O(2^n)$? Begründen Sie ihre Antwort!

[1 Punkt]

b. Erfüllt der im Folgenden als Baum dargestellte Min-Heap die Heap-Eigenschaft aus der Vorlesung? Begründen Sie Ihre Antwort!



[1 Punkt]

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Fortsetzung von Aufgabe 1

c. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Laufzeit von BucketSort in $O(n + K) = O(n)$ liegt, wobei n die Anzahl an Elementen und K eine konstante obere Schranke für alle zu sortierenden Zahlen ist. Es soll nun folgendermaßen ein Array A von beliebig großen Zahlen aus \mathbb{N} sortiert werden, zu denen keine konstante obere Schranke bekannt ist:

1. Bestimme die größte Zahl z_{\max} in A .
2. Lege ein Array mit z_{\max} vielen Einträgen an.
3. Führe mithilfe des neuen Arrays und z_{\max} BucketSort auf A aus.

Liegt die Laufzeit dieses Algorithmus ebenfalls in $O(n)$ (mit $n = |A|$)? Begründen Sie Ihre Antwort! [2 Punkte]

Name:

Klausur-ID:

Klausur Algorithmen I, 4. September 2017

Blatt 4 von 23

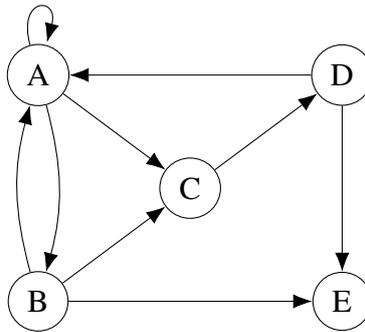
Fortsetzung von Aufgabe 1

d. Sortieren Sie das Array $\langle 4, 9, 26, 23, 10, 3, 8, 30 \rangle$ mit dem MergeSort-Algorithmus. Verwenden Sie zur Darstellung das Schema aus der Vorlesung und geben Sie bei jedem Schritt an, ob es sich um einen split- oder merge-Schritt handelt. [2 Punkte]

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Fortsetzung von Aufgabe 1

e. Geben Sie für den folgenden gerichteten Graphen eine Adjazenzmatrix und ein Adjazenzfeld an, welche den Graphen repräsentieren. Markieren Sie dabei eindeutig, welche/r Spalte/Zeile/Eintrag für welchen Knoten steht!



[2 Punkte]

Fortsetzung von Aufgabe 1

g. Geben Sie eine optimale Lösung für das Rucksackproblem mit Kapazität $M = 40$ und den Gegenständen A, B, C, D und E an, welche jeweils die folgenden Kosten und Profite haben:

	A	B	C	D	E
Kosten	10	20	15	20	35
Profit	15	10	14	12	20

[2 Punkte]

h. Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Rekurrenz $T(n)$:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n < 4, \\ 2 \cdot T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) + n & \text{falls } n \geq 4. \end{cases}$$

Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass $T(n) \in O(n!)$ gilt.

[3 Punkte]

Aufgabe 2. Maximales Produkt

[8 Punkte]

Gegeben sei ein Array $A[1..n]$ mit $n \geq 2$ und $a[i] \in \mathbb{Z}$. Gesucht sind zwei Zahlen mit dem *maximalen* Produkt und unterschiedlichem Index in A .

a. Geben Sie für das Eingabearray das maximale Produkt an und markieren Sie die beiden Zahlen: [1 Punkt]

8	-8	10	1	-12	-2	6	-6	4	-9
---	----	----	---	-----	----	---	----	---	----

Antwort:

b. Betrachten Sie folgenden Algorithmus, der ein Array $A[1..n]$ als Eingabe erhält und die Zahlen mit maximalem Produkt berechnet:

Function maxProduct(A : Array $[1..n]$ of \mathbb{Z}) : (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})

```

 $p_{\max} := -\infty$ 
 $i_{\max} := 1, j_{\max} := 2$ 
 $i := 1, j := 2$ 
while  $i \leq n - 1$  do
     $j := i + 1$ 
    while  $j \leq n$  do
         $\otimes$ 
        if  $p_{\max} < A[i] \cdot A[j]$  then
             $p_{\max} := A[i] \cdot A[j]$ 
             $i_{\max} := i, j_{\max} := j$ 
         $j := j + 1$ 
     $i := i + 1$ 
return ( $A[i_{\max}], A[j_{\max}]$ )

```

Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus, in dem Sie an der mit \otimes gekennzeichneten Stelle eine Schleifeninvariante angeben und diese beweisen. Geben Sie zusätzlich die Laufzeit des Algorithmus im O-Kalkül an. [3 Punkte]

Name:

Klausur-ID:

Klausur Algorithmen I, 4. September 2017

Blatt 9 von 23

Fortsetzung von Aufgabe 2

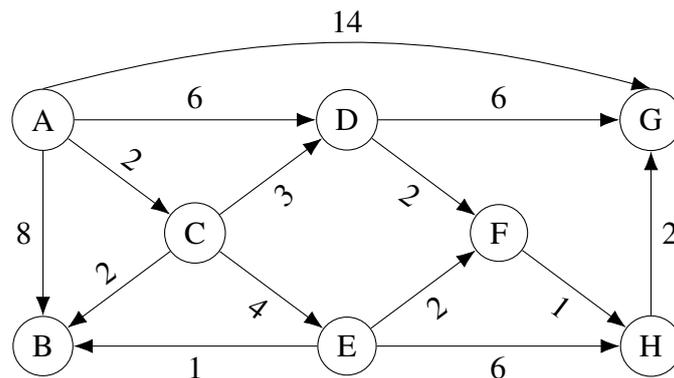
(weiterer Platz für Aufgabe 2 b.)

c. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der zur Lösung des Problems maximal $O(n)$ Zeit benötigt. Geben Sie den Algorithmus in Pseudocode an! Sie müssen die Laufzeit des Algorithmus nicht beweisen. [4 Punkte]

Aufgabe 3. Kürzeste Wege

[12 Punkte]

a. Führen Sie Dijkstras Algorithmus auf dem folgenden Graphen ausgehend vom Knoten A aus. Geben Sie die Reihenfolge der Knoten an, in der sie als *scanned* markiert werden. Geben Sie außerdem für jeden Knoten $v \in V$ **alle** Zwischenwerte $d[v]$ und $parent[v]$ an, die während der Ausführung des Algorithmus angenommen werden. Füllen Sie dazu die untenstehende Tabelle aus. [5 Punkte]



scanned-Reihenfolge: _____

Knoten	$d[\cdot]$	$parent[\cdot]$
A	0	A
B	∞ ,	\perp ,
C	∞ ,	\perp ,
D	∞ ,	\perp ,
E	∞ ,	\perp ,
F	∞ ,	\perp ,
G	∞ ,	\perp ,
H	∞ ,	\perp ,

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Fortsetzung von Aufgabe 3

Im Folgenden betrachten wir ausschließlich zusammenhängende und gerichtete Graphen mit positiven und ganzzahligen Kantengewichten größer 0. Wir erweitern das Problem der kürzesten Wege. In den folgenden Aufgaben b), c) und d) seien die **Kosten** eines Weges im Graphen definiert als die Summe der Kantengewichte plus die Anzahl der Kanten des Weges. Gesucht sind nun ausgehend von einem Startknoten S die Wege zu allen anderen Knoten mit jeweils *minimalen* Kosten.

Hinweis: Verwechseln Sie nicht die *Kosten* eines Weges mit seiner Länge!

b. Beweisen Sie, dass Dijkstras Algorithmus nicht zwingend die Wege mit minimalen Kosten berechnet. Geben Sie dazu einen Graphen mit maximal 6 Knoten als Gegenbeispiel an. Erklären Sie kurz, weshalb es sich bei Ihrem Graphen um ein Gegenbeispiel handelt. [2 Punkte]

Fortsetzung von Aufgabe 3

c. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe eines zusammenhängenden gerichteten Graphens $G = (V, E)$, einer Gewichtsfunktion $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E : c(e) > 0$ und eines Knotens $S \in V$ die Wege mit minimalen Kosten in G ausgehend von S berechnet. Sie können dazu davon ausgehen, dass Ihnen eine Funktion $dijkstra(G, S, c)$ zur Verfügung steht, die auf dem Graphen G Dijkstras Algorithmus ausgehend von S berechnet. Die Laufzeit ihres Algorithmus soll im O-Kalkül nicht langsamer als die Laufzeit von Dijkstras Algorithmus sein. Für diese Aufgabe ist kein Pseudocode nötig, es genügt wenn Sie Ihren Algorithmus eindeutig beschreiben. Sie müssen die Laufzeit Ihres Algorithmus nicht beweisen. [3 Punkte]

d. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus zu Berechnung von Wegen mit minimalen Kosten aus Teilaufgabe c). [2 Punkte]

Aufgabe 4. (a,b)-Bäume

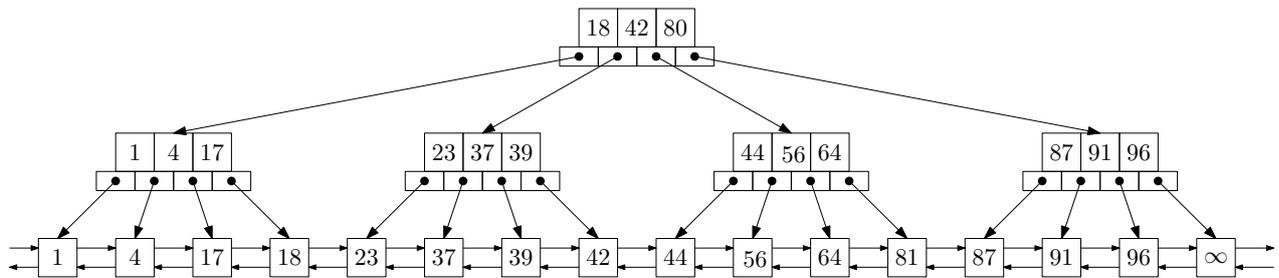
[6 Punkte]

Für die im Folgenden auszuführenden (a,b)-Baum Operationen gelten folgende Regeln: Wenn ein Baumknoten gespalten werden muss bekommt der linke Knoten $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ Elemente und der rechte Knoten $\lceil (b+1)/2 \rceil$ Elemente. Für fuse/balance Operationen wird immer der linke Nachbarknoten verwendet.

a. Gegeben sei folgender (2,4)-Baum für die sortierte Folge

(1, 4, 17, 18, 23, 37, 39, 42, 44, 56, 64, 81, 87, 91, 96).

Führen Sie die nachfolgenden **locate**-Operationen durch. Markieren Sie hierzu den entsprechenden Suchpfad durch den Baum, indem Sie die jeweils betrachteten Kanten eindeutig markieren (z.B. Umkringeln der Kanten, deutliches Nachfahren der Kanten...). Tragen Sie die Rückgabewerte in die entsprechenden Felder ein. Liefern beide Aufrufe ein korrektes Ergebnis? Falls nein, begründen Sie, warum der Baum fehlerhaft ist.



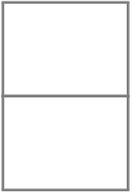
[2 Punkte]

locate(42):

locate(81):

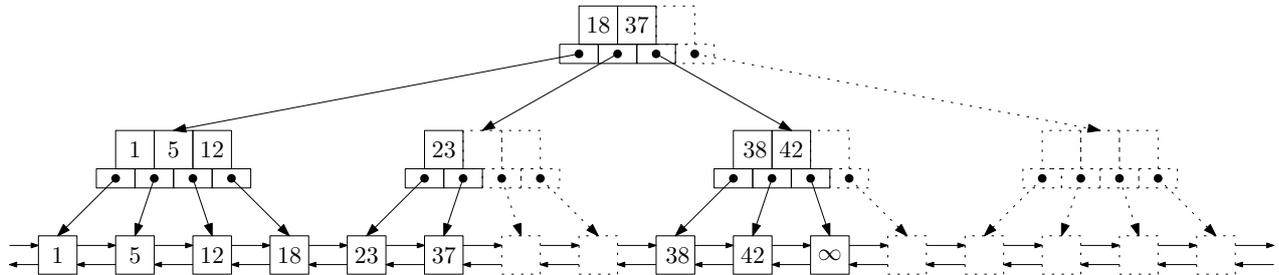
Begründung:

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)



Fortsetzung von Aufgabe 4

b. Gegeben sei folgender (2,4)-Baum für die sortierte Folge (1, 5, 12, 18, 23, 37, 38, 42). Nicht verwendete Baumelemente sind gestrichelt dargestellt.

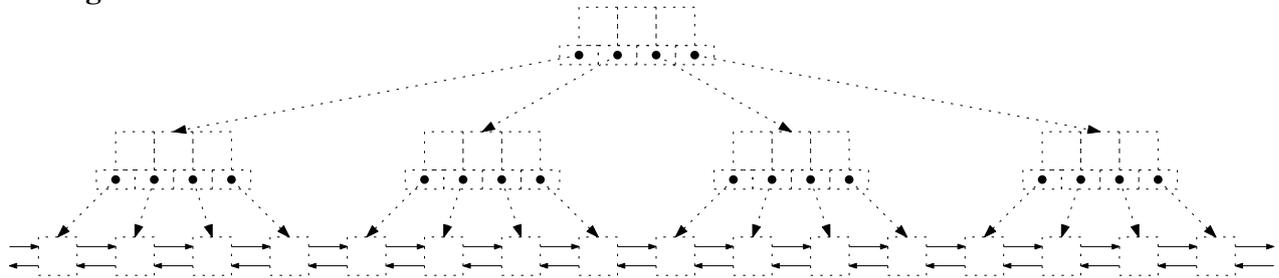


Führen Sie die geforderten Operationen in der angegebenen Reihenfolge durch:

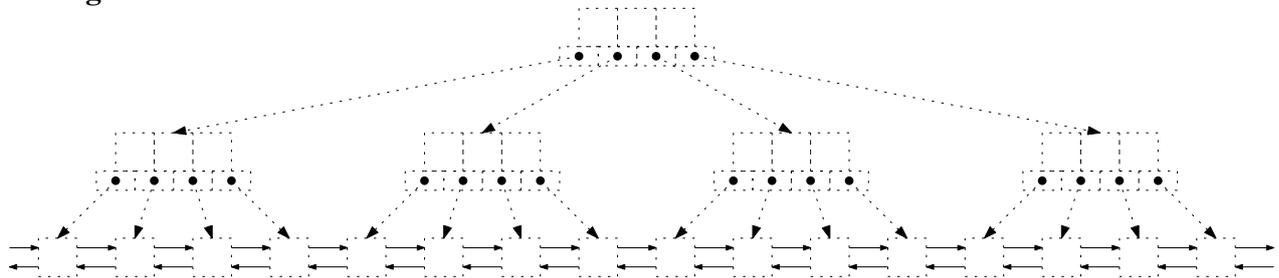
Einfügen von 45, danach Einfügen von 73

Zeichnen Sie den Endzustand des Baumes nach jeder der angegebenen Operationen in das vorgegebene Baumschema ein. Es sind weitere Baumschemata angegeben, die Sie zur Korrektur verwenden können - markieren Sie bitte deutlich, welche Operation dargestellt wird und streichen Sie eindeutig die Bäume durch, die nicht gewertet werden sollen (ansonsten wird der schlechtere Baum gewertet). [2 Punkte]

Einfügen von 45:



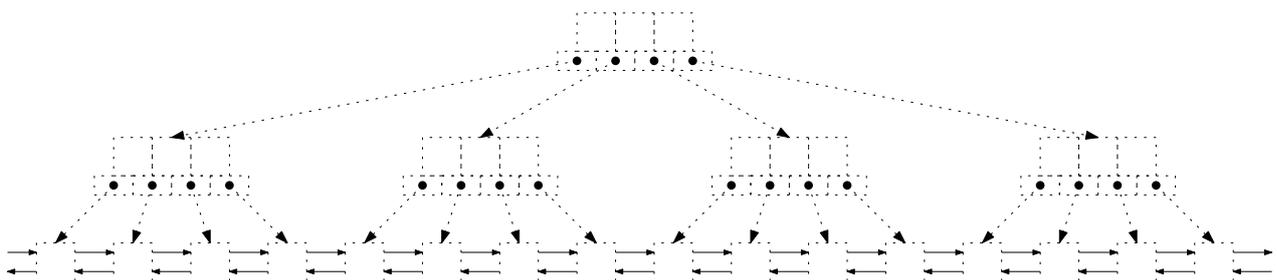
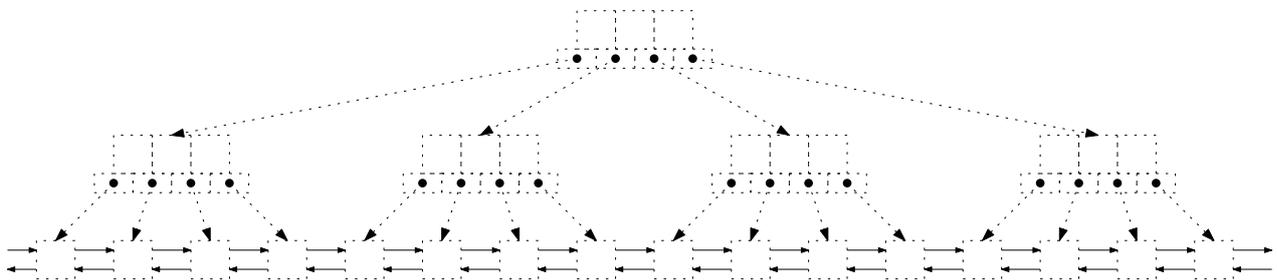
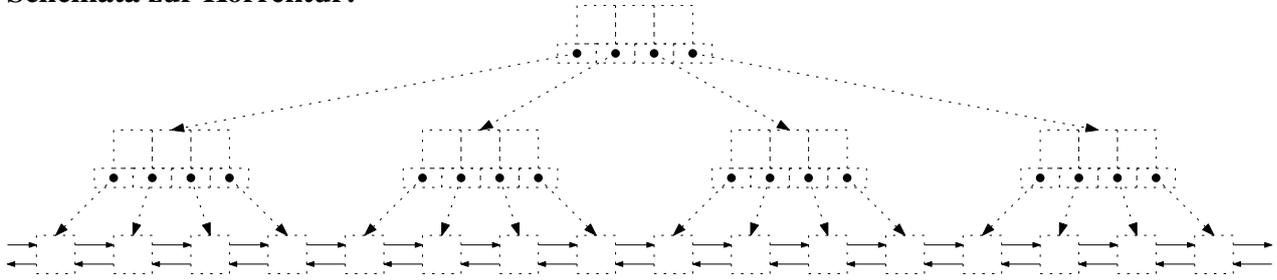
Einfügen von 73:



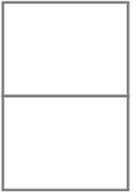
(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Fortsetzung von Aufgabe 4

Schemata zur Korrektur:

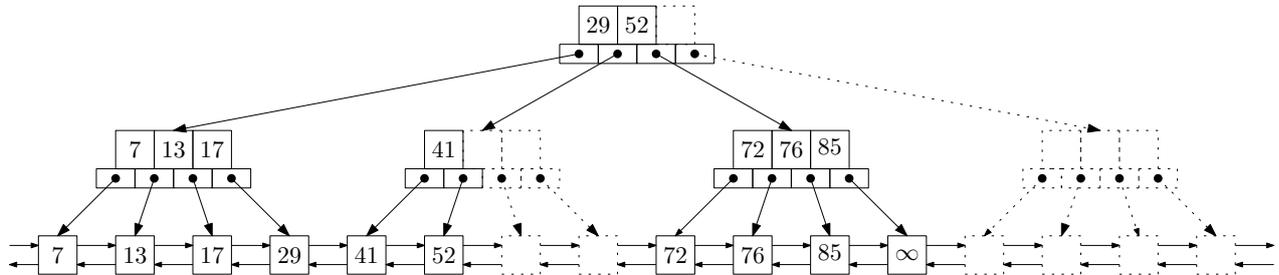


(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)



Fortsetzung von Aufgabe 4

c. Gegeben sei folgender (2,4)-Baum für die sortierte Folge (7, 13, 17, 29, 41, 52, 72, 76, 85). Nicht verwendete Baumelemente sind gestrichelt dargestellt.

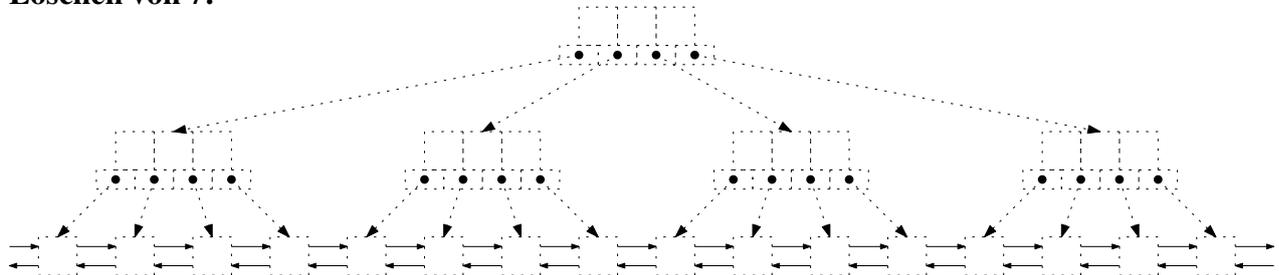


Führen Sie die geforderten Operationen in der angegebenen Reihenfolge durch:

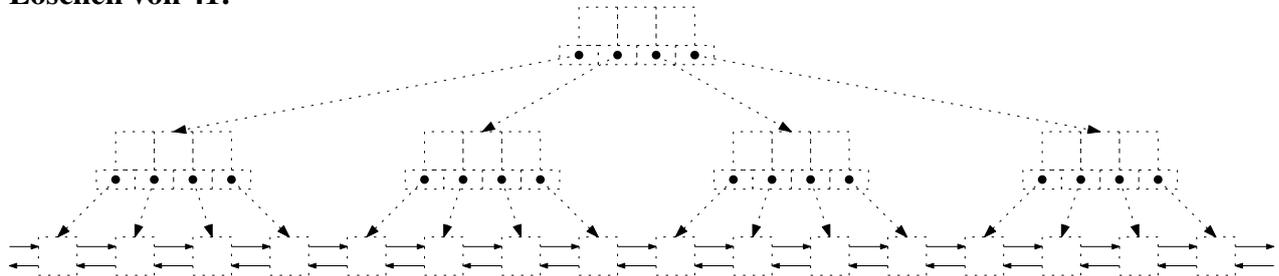
Löschen von 7, danach Löschen von 41

Zeichnen Sie den Endzustand des Baumes nach jeder der angegebenen Operationen in das vorgegebene Baumschema ein. Es sind weitere Baumschemata angegeben, die Sie zur Korrektur verwenden können - markieren Sie bitte deutlich, welche Operation dargestellt wird und streichen Sie eindeutig die Bäume durch, die nicht gewertet werden sollen (ansonsten wird der schlechtere Baum gewertet). [2 Punkte]

Löschen von 7:



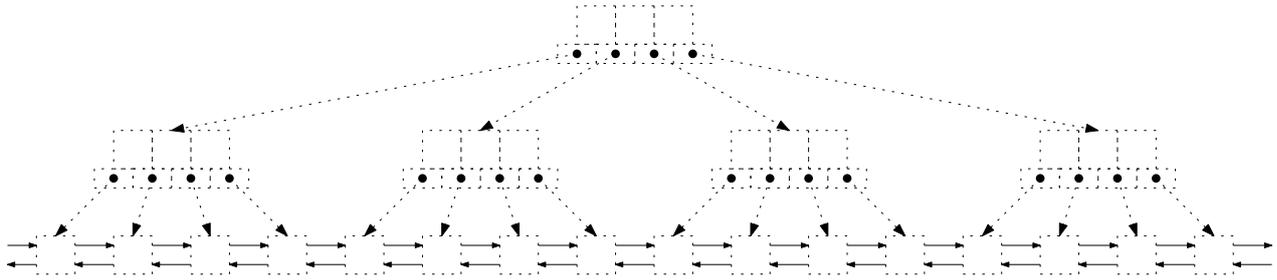
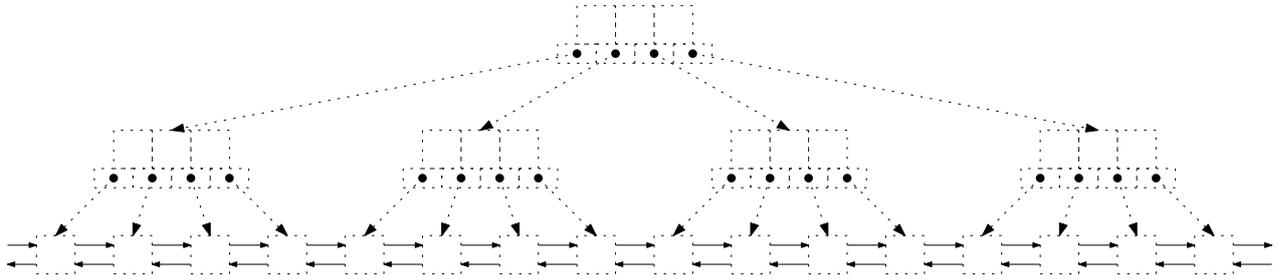
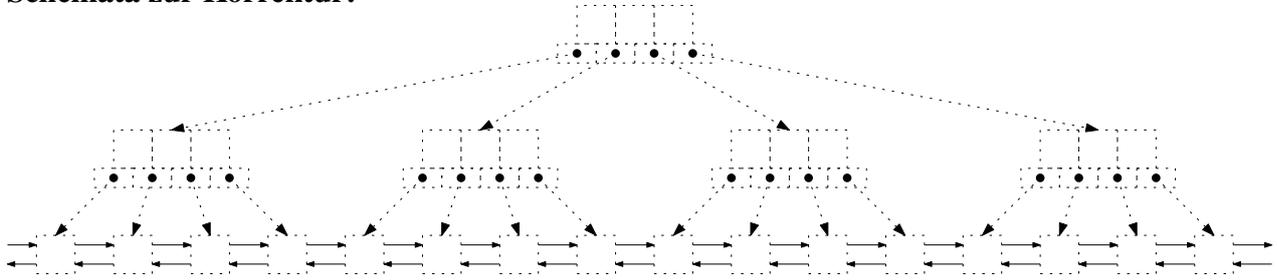
Löschen von 41:

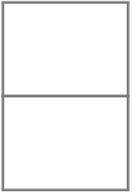


(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Fortsetzung von Aufgabe 4

Schemata zur Korrektur:



**Aufgabe 5. Bipartite Graphen**

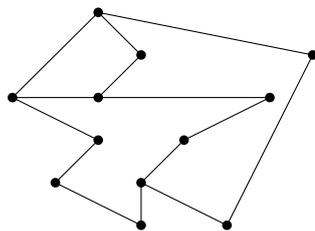
[9 Punkte]

Gegeben sei ein ungerichteter und zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit ungewichteten Kanten. Ein Graph heißt *bipartit*, falls sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufteilen lassen, sodass zwischen den Knoten innerhalb beider Teilmengen keine Kanten verlaufen. Das heißt für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt entweder $u \in A$ und $v \in B$ oder $u \in B$ und $v \in A$.

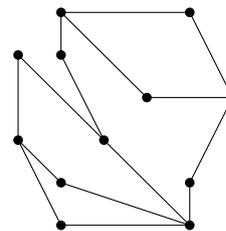
Im Folgenden betrachten wir zwei Möglichkeiten zu prüfen, ob ein gegebener Graph bipartit ist:

1. Ein Graph ist bipartit, genau dann wenn er *zweifärbbar* ist, das heißt, wenn es eine Abbildung $f : V \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, so dass $\forall \{u, v\} \in E : f(u) \neq f(v)$. Es dürfen also keine zwei benachbarten Knoten die gleiche „Farbe“ 0 bzw. 1 haben.
2. Ein Graph ist bipartit, genau dann wenn er keinen Kreis *ungerader* Länge, d.h. mit einer ungeraden Anzahl an Kanten, enthält.

a. Prüfen Sie, ob folgende Graphen bipartit sind. Geben Sie für bipartite Graphen eine Zweifärbung an, indem sie die Knoten entsprechend markieren (beispielsweise durch Umkreisen oder Durchkreuzen). Kennzeichnen Sie in nicht bipartiten Graphen einen ungeraden Kreis. [1 Punkte]



(a)



(b)

Fortsetzung von Aufgabe 5

b. Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der mittels Tiefensuche in $O(|V| + |E|)$ Zeit prüft, ob G *zweifärbbar* ist. Verwenden Sie hierfür das folgende Tiefensuchschema, indem Sie an den gekennzeichneten Stellen Pseudocode hinzufügen. Sie müssen nicht an allen gekennzeichneten Stellen Code einfügen. Innerhalb dieser Aufgabe dürfen Sie keine weiteren Algorithmen, Subroutinen, Methoden o.ä. aufrufen - geben Sie alle Ihre Schritte explizit in Pseudocode an!

[4 Punkte]

Tiefensuchschema für $G = (V, E)$ mit Startknoten $s \in V$

$\forall v \in V : \text{marked}[v] := \text{false}$

①

bipartite :=

marked[s] := true

DFS(\perp, s)

①

return bipartite

Procedure DFS($u, v : \text{NodeId}$)

②

foreach $(v, w) \in E$ do

③

if not marked[w] then

④

marked[w] := true

DFS(v, w)

⑤

⑥

⑦

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Fortsetzung von Aufgabe 5

c. Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der mittels Breitensuche in $O(|V| + |E|)$ Zeit prüft, ob G einen Kreis ungerader Länge enthält. Verwenden Sie hierfür das folgende Breitensuchschema, indem Sie an den gekennzeichneten Stellen Pseudocode hinzufügen. Sie müssen nicht an allen gekennzeichneten Stellen Code einfügen. Innerhalb dieser Aufgabe dürfen Sie keine weiteren Algorithmen, Subroutinen, Methoden o.ä. aufrufen - geben Sie alle Ihre Schritte explizit in Pseudocode an! [4 Punkte]

Breitensuchschema für $G = (V, E)$ mit Startknoten $s \in V$

$d = \langle \infty, \dots, \infty \rangle$: Array of $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$; $d[s] := 0$

$\text{parent} = \langle \perp, \dots, \perp \rangle$: Array of NodeId; $\text{parent}[s] := s$

$Q = \langle s \rangle, Q' = \langle \rangle$: Set of NodeId

$\text{bipartite} :=$

①

for ($\ell := 0$; $Q \neq \langle \rangle$; $\ell++$)

①

foreach $u \in Q$ **do**

②

foreach $(u, v) \in E$ **do**

③

if $\text{parent}[v] = \perp$ **then**

④

$Q' := Q' \cup \{v\}$; $d[v] := \ell + 1$; $\text{parent}[v] := u$

⑤

⑥

⑦

$(Q, Q') := (Q', \langle \rangle)$

⑧

⑨

return bipartite

Aufgabe 6. Dynamische Programmierung

[10 Punkte]

Die Levenshtein-Distanz ist eine Metrik zur Bestimmung der Ähnlichkeit zweier Zeichenketten. Dabei gibt $d(v, w)$ die minimale Anzahl an Edit-Operationen an, um v in w umzuwandeln (oder umgekehrt). Als Operationen sind dabei nur das Einfügen, Entfernen oder Ersetzen einzelner Zeichen zugelassen.

Beispielsweise ist $d(\text{Aufgabe}, \text{Aufnahme}) = 3$, da 3 Schritte notwendig sind, um ein Wort in das andere umzuwandeln:

Aufgabe	Ersetzen von g durch n
Aufn <u>a</u> b <u>e</u>	Ersetzen von b durch h
Aufn <u>a</u> m <u>e</u>	Einfügen von m
Aufn <u>a</u> m <u>e</u>	

a. Bestimmen Sie die Levenshtein-Distanz der Wörter *Dynamisch* und *Stammtisch* und geben Sie eine mögliche minimale Sequenz von Operationen an, um ein Wort in das andere umzuwandeln.

[2 Punkte]

Fortsetzung von Aufgabe 6

b. Entwerfen Sie einen Algorithmus nach dem Entwurfsprinzip der dynamischen Programmierung, welcher die Levenshtein-Distanz $d(v, w)$ zweier Wörter v und w berechnet. Die Laufzeit des Algorithmus soll dabei in $O(|v| \cdot |w|)$ liegen. Für diese Aufgabe ist kein Pseudocode notwendig, es genügt, wenn Sie Ihren Algorithmus eindeutig beschreiben.

Hinweis: Verwenden Sie ein 2-dimensionales Array D der Größe $(|v| + 1) \times (|w| + 1)$ und speichern Sie in Eintrag $D_{i,j}$ die Lösung des Teilproblems $d(v[0..i], w[0..j])$. [5 Punkte]

c. Analysieren Sie die Laufzeit und den Speicherverbrauch Ihres Algorithmus im O-Kalkül. [3 Punkte]

Name:

Klausur-ID:

Klausur Algorithmen I, 4. September 2017

Blatt 23 von 23

Konzeptpapier für Nebenrechnungen.